Исследовательские задания
XV областного турнира юных математиков

Важные указания к порядку решения и оформления исследований по заданиям турнира юных математиков

Обращаем ваше **ВНИМАНИЕ** на то, что предлагаемые задания (далее – задачи) носят исследовательский характер (в отличие от олимпиадных задач). Полные решения и наилучшие обобщения этих задач неизвестны даже авторам, поэтому:

- во-первых, **необязательно решать все задачи** – необходимое количество представляемых в жюри задач – 7, а итог будет подводиться по 9 лучшим, т.е. наиболее полно и верно решенным Вами задачам (подробнее см. правила проведения турнира и правила математического боя на странице «Республиканский турнир юных математиков» (на сайте www.uni.bsu.by);
- во-вторых, **наиболее полное решение (исследование)** задачи не означает, что нужно решить ВСЕ ПУНКТЫ задачи, точнее – решаем «настолько полно насколько можем», имейте в виду, что в ряде задач интерес представляют даже ***первые пункты или отдельные частные случаи*** *заданий (их пунктов или небольших значений параметров)*;
- в-третьих, возможно (это допускается и даже приветствуется) вы *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных в формулировках задач;
- в-четвертых, кроме рассмотрения исходной постановки *полезно рассмотреть свои направления*, причем ваши исследования **НЕОБЯЗАТЕЛЬНО** должны совпадать с предложениями авторов;
- **ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО КАЖДОЙ ЗАДАЧЕ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО** от других задач в распечатанном виде **в двух экземплярах** (до 30 стр. формата А4), а также в электронной форме в pdf-формате (образец названия файлов «Brest-gym97-2024-problem7-predvar», при этом:
  - **оформление каждой задачи должно начинаться С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором нужно указать номер задачи и ее название, название учреждения образования, название команды (если команда является сборной двух или нескольких учреждений), город, автора(ов) исследования (решения);
  - **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ СОБСТВЕННЫЕ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы);
  - **ОБЯЗАТЕЛЬНО** дайте **четкие ссылки на литературу и другие источники**, которые вы использовали при проведении исследований (**в месте их использования**).

Сроки представления: **-заявок и материалов на турнир – до 25 октября 2024 г.,**

- официальных заявок – 2 ноября 2024 г.,

Подробнее см. на сайте uni.bsu.by на странице турнира.(ссылку копитьвать и вставить в адресную строку) ВНИМАНИЕ! В Задачу 9 внесены изменения!

Задача 1. Равенство или отношение площадей.

1) На отрезке XY как на диаметре построена полуокружность и выбрана произвольная точка Z на этом отрезке (рис. 1). Девять лучей из точки Z делят развернутый угол XYZ на 10 равных частей и пересекают полуокружность в точках A_1, A_2, …, A_9 соответственно (в порядке обхода от X к Y). Докажите, что сумма площадей треугольников A_2ZA_3 A_7ZA_8 равна площади четырехугольника $A_2A_3A_7A_8$ (*Квант,* 2024, *№* 3).

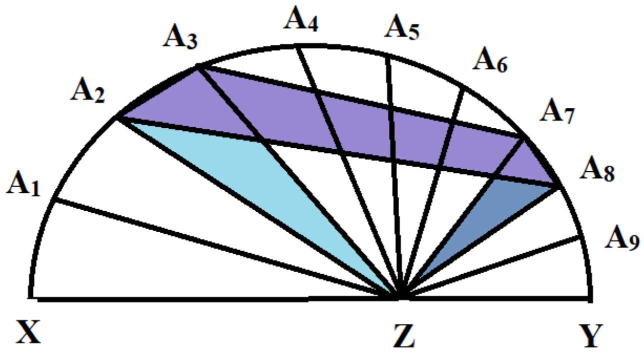


Рисунок 1

2) Найдутся ли еще треугольники на рис. 1, удовлетворяющие такому условию.

3) Для разных пар треугольников в этой конфигурации вычислите отношения сумм их площадей к площади соответствующего четырехугольника. Попробуйте найти условия, при которых эти отношения являются целыми (рациональными).

4) Пусть теперь угол XZY разделен на *n* равных частей. Исследуйте вопросы, аналогичные пунктам 1-3 в этом случае (при различных значениях *n*, возможно небольших).

Примечание 1. Итогом исследования пунктов 1) – 4) может стать общая теорема об отношениях сумм площадей определенным образом выбранных треугольников к некоторым четырехугольникам в зависимости от n и от положения точки Z.

5) На окружности отмечена дуга XY и взята точка Z внутри этой окружности. Дуга XY разбивается на n меньших дуг точками A_1, A_2, …, A_{n-1} так, что углы XZA_1, A_1ZA_2, …, $A_{n-1}ZY$ равны. Исследуйте вопрос о соотношении площадей треугольников вида A_kZA_{k+1} и четырёхугольников, вершины которых взяты из точек A_1, A_2, …, A_{n-1}.

6) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 2. Авиапутешественник

Имеется некоторая страна, в которой есть *N* городов. Каждый город связан двусторонним авиасообщением с *k* другими городами. При этом из любого города можно добраться в любой другой, возможно, с пересадками. Путешественнику нужно добраться из города *А* в город *Б*. Какого наименьшего числа перелётов ему гарантированно хватит?

1. Рассмотрите эту задачу, если $k = 2$, $N > 2$.
2. Решите задачу при $N = 10$, $k = 3$.
3. Решите задачу при $N = 100$, $k = 3$.

4. Исследуйте случай $k = 3$, а N любое целое число, большее k.

5. Рассмотрите эту задачу, если $k = 4$, $N > 4$. Постройте аналоги пунктов 2–4.

6. Исследуйте задачу в общем виде.

7. Предложите и исследуйте свои обобщения. Например, случай, когда города связаны с различным числом других городов.

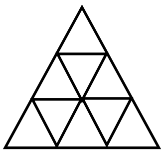
Задача 3. Незнайка раскрашивает таблицы

1. Незнайка похвастал, что, как бы не окрашивать клетки таблицы 10×10, каждую в один из двух цветов: белый или черный, он сможет найти прямоугольник (возможно квадрат), вершины которого совпадают с центрами четырех одинаково окрашенных клеток (назовем его одноцветным). Прав ли Незнайка?

2. В пункте 1 заменим таблицу 10×10 на таблицу $n\times n$. При каком наименьшем n Незнайка всегда (т. е. при любой окраске) сможет найти одноцветный прямоугольник (возможно квадрат)?

3. А если окрашивать не в два, а в три цвета? Исследуй пункты 1 и 2 в этом случае.

4. Логично обобщить пункт 2 на $k > 3$ цветов. При каком наименьшем n (в зависимости от k) в этом случае Незнайка всегда (т. е. при любой окраске) сможет найти одноцветный прямоугольник (возможно квадрат)?



5. Рассмотрите аналог пунктов 1–4, но для треугольной таблицы. Пример такой таблицы для $n = 3$ изображен справа. Понятно, что Незнайка будет искать не прямоугольники, а одноцветные равносторонние треугольники.

6. А если в пункте 5 искать одноцветные параллелограммы?

7. Предложите свои общения задачи. Например, на трехмерное пространство.

Задача 4. Неравенства с добавкой

1. Выбирем два положительных действительных числа a и b. К ним добавляем дополнительное действительное число c такое, что $0 < c \leq \max\{a, b\}$. Будет ли «неравенство с добавкой»

$$\frac{a^3 + b^3}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})^3}$$

верным при всех указанных выше значениях a, b, c?

2. Выбирем положительные действительные числа a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. К ним добавляем дополнительное действительное число a_{n+1} такое, что $0 < a_{n+1} \leq \max\{a_1, \ldots, a_n\}$. Будет ли «неравенство с добавкой»

$$\frac{a_1^3 + \cdots + a_n^3}{(\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2})^3} \geq \frac{a_1^3 + \cdots + a_n^3 + a_{n+1}^3}{(\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2})^3}$$

верным при всех указанных выше значениях $a_1, \ldots, a_{n+1}$?

3. Выбирем положительные действительные числа числа a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. К ним добавляем дополнительное действительное число a_{n+1} такое, что $0 < a_{n+1} \le \max\{a_1, \ldots, a_n\}$. При каких натуральных значениях k «неравенство с добавкой»

$$\frac{a_1^k + \cdots + a_n^k}{\left(\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\right)^k} \ge \frac{a_1^k + \cdots + a_n^k + a_{n+1}^k}{\left(\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2}\right)^k}$$

верным при всех указанных выше значениях $a_1, \ldots, a_{n+1}$?

4. Существуют ли ненулевые значения a_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, при которых «неравенство с добавкой» превращается в равенство?

5. Предложите свои обощения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача 5. О средних степенных

Через $H_p(a_1, \ldots, a_n)$ для положительных чисел a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, обозначим среднее степенное степени p:

$$H_p(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^p + \cdots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, & p \ne 0; \\ \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}, & p = 0. \end{cases}$$

I. Пусть a, b, x, y — произвольные положительные числа.

1. Докажите неравенство $H_1(ax, by) \le H_2(a, b)H_2(x, y)$.
2. Найдите четвёрку чисел (a, b, x, y) для которой неравенство $H_2(ax, by) \le H_3(a, b)H_3(x, y)$ а) выполнено, б) не выполнено.
3. Докажите неравенство $H_2(ax, by) \le H_4(a, b)H_4(x, y)$.
4. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$. Докажите, что если неравенство $H_p(ax, by) \le H_q(a, b)H_q(x, y)$ выполняется для любых положительных a, b, x, y, то $q \ge 2p$. Верно ли это в случае произвольного положительного рационального p?
5. Найдите наибольшее значение $\alpha \in (0; 1)$ такое, что для любых положительных a, b, x, y верно $\alpha H_2(ax, by) \le H_3(a, b)H_3(x, y)$.
6. Докажите неравенства
   а) $H_0(ax, by) \le H_1(a, b)H_1(x, y)$;
   б) $H_{-1}(ax, by) \le H_0(a, b)H_0(x, y)$.
7. Найдутся ли такие $p, q \in \mathbb{N}$, что неравенство $H_{-p}(ax, by) \le H_{-q}(a, b)H_{-q}(x, y)$ будет выполняться для любых положительных a, b, x, y?
8. Обобщите предыдущие пункты на случай большего количества переменных.

II. Пусть $a \ge b \ge c > 0$, $x \ge y \ge z > 0$, $r \ge s \ge t > 0$.

1. Докажите неравенства
   а) $H_1(ax, by) \geq H_1(a,b)H_1(x,y)$;
   б) $H_2(ax, by) \geq H_1(a,b)H_1(x,y)$;
   в) $H_2(ax, by) \geq H_2(a,b)H_2(x,y)$;
   г) $H_1(ax, by, cz) \geq H_1(a,b,c)H_1(x,y,z)$;
   д) $H_1(axr, bys) \geq H_1(a,b)H_1(x,y)H_1(r,s)$; е) $H_1(axr, bys, czt) \geq H_1(a,b,c)H_1(x,y,z)H_1(r,s,t)$.
2. Найдите наименьшее значение α такое, что неравенство
   а) $\alpha H_1(axr, bys) \geq H_2(a,b)H_2(x,y)H_2(r,s)$; б) $\alpha H_1(ax, by, cz) \geq H_2(a,b,c)H_2(x,y,z)$ будет верным.
3. Обобщите предыдущие пункты для других средних степенных и для большего количества переменных.

Задача 6. Ещё раз об угадывании

1. Мудрец задумывает точку $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. За один ход Вы называете мудрецу точку $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, после чего мудрец называет число $\rho(A,X)$. За какое наименьшее количество ходов Вы сможете угадать задуманную точку, если Вы знаете, что задуманная точка имеет положительные координаты и
   а) $\rho(A,X) = |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| + \cdots + |x_n - a_n|$;
   б) $\rho(A,X) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$;
   в) $\rho(A,X) = (|x_1 - a_1|^p + |x_2 - a_2|^p + \cdots + |x_n - a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p > 1$;
   г) $\rho(A,X) = \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|, \ldots, |x_n - a_n|\}$?
   д) Сможете ли Вы угадать точку в пункте в), если $0 < p < 1$?
   е) Сможете ли Вы угадать точку в пунктах а) – г) за меньшее количество ходов, если будет известны числа $m_1, m_2, \ldots, m_n, M_1, M_2, \ldots, M_n$ такие, что $m_1 \leq x_1 \leq M_1$, $m_2 \leq x_2 \leq M_2$, $\ldots$, $m_n \leq x_n \leq M_n$?
   ё) Сможете ли Вы угадать точку в пунктах а) – г), если точка X не обязательно имеет положительные координаты?
2. Мудрец задумал многочлен от одной переменной p степени *n* (чему равно *n* Вы знаете). За один ход Вы называете мудрецу непрерывную функцию от одной переменной f, после чего мудрец называет число $\rho(p,f)$. За какое наименьшее количество ходов Вы отгадаете задуманный многочлен, если
   а) $\rho(p,f) = \int_0^1 |p(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x$;
   б) $\rho(p,f) = \max_{x \in [0;1]} |p(x) - f(x)|$?
   в) Сможете ли Вы угадать многочлен в пункте а), если *n* заранее не известно?
   г) Сможете ли Вы обобщить пункт а) на случай многочлена от двух переменных?
3. Предложите свои обобщения и изучите их.

Задача 7. Последовательности числовых наборов

Будем рассматривать неупорядоченные числовые наборы, которые состоят из нескольких, возможно одинаковых, чисел, которые будем называть элементами набора. Порядок следования элементов в таком наборе не задан.

Будем рассматривать последовательности таких наборов, получаемых многократным применением одной и той же операции к некоторому начальному (исходному) набору. Другими словами, пусть дан начальный (исходный) набор X_0 и операция f, в результате применения которой к имеющемуся набору X получается неупорядоченный числовой набор $f(X)$. Последовательно применяя указанную операцию сначала к исходному набору, а потом к имеющемуся на данный момент, получим последовательность X_0, $f(X_0)$, $f\big(f(X_0)\big)$, …, $f\big(f(\ldots f(X_0)\ldots)\big)$ и так далее. Заметим, что операция может быть неприменима к некоторым наборам. Если для получения следующего члена последовательности надо найти $f(X)$, а f неприменима к X, то следующего члена в последовательности нет, то есть имеет место конечная последовательность. Если же операция является применимой к каждому получаемому члену последовательности, то имеет место бесконечная последовательность.

1. Определите конечной или бесконечной будет последовательность наборов, получаемая повторным применением к начальному набору из чисел 12 и 21 (т.е. $X_0 = \{12, 21\}$) следующей операции: если набор состоит из двух неравных действительных чисел, то большее из них заменяется на модуль их разности, в противном случае операция не применима.

2. Существует ли такой начальный неупорядоченный набор двух действительных чисел, повторное применение к которому операции из пункта 1 даст последовательность, тип которой (конечная или бесконечная) отличен от последовательности из пункта 1?

3. Для каких начальных наборов получаемая повторным применением операции из пункта 1 последовательность будет

а) конечной, бесконечной?

4. Рассмотрим следующую операцию, применяемую к неупорядоченным наборам из трёх чисел. Если наибольшее из трёх чисел больше или равно сумме двух других, то оно заменяется на разность себя и этой суммы, в противном случае операция не применима к набору. Существует ли такой начальный неупорядоченный набор трёх действительных чисел, повторное применение к которому рассматриваемой операции даст последовательность, которая будет

а) конечной, бесконечной?

5. Для каких начальных наборов получаемая повторным применением операции из пункта 4 последовательность будет

а) конечной, бесконечной?

6. Рассмотрите задачи, аналогичные пунктам 4 и 5, для следующей операции, применяемой к наборам из двух различных действительных чисел, больших 1: большее число заменяется на результат деления его на второе число.

7. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и исследуйте их.

Задача 8. Уравняем кучки

Две исходные задачи:

1.0) В трех кучках находится 22, 14 и 12 орехов. Требуется путём трёх операций, состоящих в перекладывании из одной (какой-то) кучки в некоторую другую, уравнять число орехов в этих кучках, соблюдая при этом условие: из любой кучки разрешается перекладывать в другую кучку лишь столько орехов, сколько орехов в той кучке уже имеется.

2.0) У трех мальчиков (у Пети, Вани и Толи) есть по кучке фантиков. Общее число фантиков 120. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было (каждому из них столько, сколько у того было). Затем Ваня дал Пете и Толе столько, сколько у них стало после первого перекладывания. И наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому моменту имелось (т.е. после второго перекладывания). В результате всем досталось поровну. Сколько фантиков было у каждого в начале?

Более общие задачи:

1) В трех кучках находится $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ орехов. Требуется путём нескольких перекладывании уравнять число орехов в этих кучках, соблюдая при этом условие: из любой (какой-то) кучки разрешается перекладывать в другую кучку лишь столько орехов, сколько в той их уже имеется. При каких значениях натуральных чисел $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ это возможно сделать. (Важно не только дать ответ, при каких значениях $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ можно, а при каких – нельзя, но и обосновать почему, а в случае «можно» описать алгоритм перекладываний).

2) Исследуйте задачу 2.0 для произвольного исходного числа N фантиков, а именно, при каких N мальчики могут поделить фантики поровну, а при каких – нет. (Ответ может зависеть от общего числа операций (передач фантиков) от одного мальчика другим, а также от порядка их выполнения (передачи)).

Еще одна задача:

3) В трех кучках находится $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ орехов. При тех же условиях перекладываний как и в задаче 1 требуется опустошить одну из кучек. Попробуйте дать ответ на вопрос, при каких $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ это можно сделать и как? (Важно не только дать ответ, при каких значениях $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ можно, а при каких – нельзя, но и обосновать почему, в случае «можно» важно описать алгоритм перекладываний).

4) Попробуйте обобщить задачи 1) – 3) на несколько кучек (более трех, хотя бы в каких-то частных случаях).

5) Предложите свои обобщения в этой задаче и исследуйте их. В частности, во всех задачах интерес представляют следующие направления:

(5.1.) исследовать разные алгоритмы и сравнить их оптимальность (с точки зрения минимальности количества операций (перекладываний)),

(5.2.) в случае невозможности выполнить требуемое в пунктах задание (т.е. уравнять кучки в задачах 1, 2 или опустошить одну из них в задаче 3) определить минимальное отклонение количества орехов (фантиков) в кучках от возможного равного (или нулевого) значения и указать условия (алгоритм) достижения этого минимального отклонения.

Задача 9. Коммутирующие многочлены

Пусть $P(x)$ и $Q(x,y)$ – многочлены от одной и двух переменных соответственно, коэффициенты которых являются действительными числами. Будем говорить, что P и Q коммутируют, если для любых действительных чисел x и y выполнено равенство

$$Q(P(x),P(y)) = P(Q(x,y)).$$

1. а) Верно ли, что для любого многочлена Q найдётся многочлен P, коммутирующий с ним? б) Верно ли, что для любого многочлена P найдётся многочлен Q, коммутриующий с ним?

2. Найдите все пары (P,Q) коммутирующих многочленов, для которых:
а) $\deg Q = 1$; б) $\deg P = 1$. Здесь и далее deg означает степень соответствующего многочлена (одной или двух переменных).

3. Найдите все многочлены P, коммутирующие с многочленом:
а) $Q(x,y) = x^n + y^n$ для некоторого натурального n;
б) $Q(x,y) = xy$.

4. а) Найдите все многочлены Q, коммутирующие с многочленом $P(x) = x^2$.
б) Попытайтесь ответить на вопрос пункта 4а) для многочлена $P(x) = x^k$, $k \in \mathrm{N}$.
в) Попытайтесь ответить на вопрос пункта 4а) для многочлена $P(x) = ax^k$, $a \in \mathrm{R}$, $k \in \mathrm{N}$.

Предположим дополнительно, что далее $Q(x,y) = R_k(x)y^k + R_{k-1}(x)y^{k-1} + \ldots + R_1(x)y + R_0(x)$, где $\deg R_k(x) \geqslant 1$.

5. Докажите, что существует натуральное число n и многочлен $D(x)$ такие, что $\deg D \geq 1$ и многочлены $R_k(x)$ и $P(P(\ldots(P(x))\ldots)) - x$ (многочлен P применяется n раз) оба делятся на $D(x)$.

6. Найдите все возможные многочлены $P(x)$, для которых существуют коммутирующие с ними многочлены $Q(x,y)$.

7. Для многочленов $P(x)$ из пункта 6 найдите все возможные многочлены $Q(x,y)$ с ними коммутирующие.

8. Предложите свои обобщения задачи и исследуйте их.

Задача 10. Числа, цифры и делимость

1. а) На доске написано число 202. Можно ли приписать одну цифру в конце, чтобы полученное число делилось на 8, 11, 23 одновременнно?
   б) Сколько существует трехзначных чисел таких, что в конце можно приписать одну цифру так, чтобы полученное число делилось на 8, 11, 23 одновременнно?
   в) Какое наименьшее количество цифр необходимо приписать в конце так, что из любого трехзначного числа можно было получить число, которое одновременнно делиться на 8, 11, 23?
2. На доске написано трехзначное число X. Всегда ли к числу можно приписать одну цифру в конце и одну цифру в начале, чтобы полученное пятизначное число делилось на а) 72, б) 44, в) 23?
3. На доске написано трехзначное число X.

а) В этом числе можно приписать одну цифру между первой и второй цифрой или одну цифру между второй и третьей, а также одну цифру в начале и одну цифру конце. Верно ли, что для любого X таким образом можно получить шестизначное число, которое делиться на 2024?

б) А если в отличие от пункта а) можно вставить одну цифру между первой и второй, еще одну между второй и третьей и еще по одной добавить в начало и в конец, верно ли тогда, что для любого X полученное семизначное число будет делиться на 2024?

в) В случае, если у вас в пунктах а) и(или) б) ответ отрицательный, то найдите наибольший делитель *d* числа 2024 такой, что для любого X можно получить таким образом число, которое делиться на d.

4. На доске написано трехзначное число X и некоторое натуральное число *t*. Известно, что если к числу X приписать любую цифру в конце и любую цифру в начале, то полученное пятизначное число не будет делиться на число *t*.

   а) Найдите, все возможные значения числа *t*, меньшие 50, для которых выполняется это условие.

   б) Найдите наименьшее простое *t*, для которого выполняется это условие.

   в) Для каких простых чисел *p* выполняется следующее условие: к любому числу больше 100 можно приписать по одной цифре в начале и в конце его десятичной записи так, чтобы полученное число делилось на *p*?

5. а) Верно ли, что для любого целого неотрицательного числа X всегда можно приписать одну цифру в конце и одну цифру в начале так, что полученное число будет делиться на 23?

   б) Если ответ в пункте а отрицательный – найдите наименьшее такое число.

   в) Верно ли, что существует такое натуральное число k, что для любого целого неотрицательного числа X всегда можно приписать k цифр в начале и одну цифру в конце так, что полученное число будет делиться на 23?

6. а) Найдите все числа n > 10 для которых верно что для любого целого неотрицательного числа X всегда можно приписать одну цифру в конце и одну цифру в начале так, что полученное число будет делиться на n?

   б) Верно ли что, если для числа n > 10 для любого целого неотрицательного числа X всегда можно приписать одну цифру в конце и одну цифру в начале так, что полученное число будет делиться на n, то утверждение будет верным, если приписать ровно две цифры в начале, а не одну и одну в конце?

   в) Для каких натуральных k утверждение останется верным, если в пункте б в начале приписывать не две цифры, а k цифр? Также в данном пункте будет интересно получить такие пары чисел n и k.

7. Предложите свои обобщения или направления исследований в этой задаче и изучите их (возможно, вы сможете провести исследование некоторых пунктов этой задачи в общем случае, т.е. для произвольных X, *t* и(или) *p*, указанных в этих пунктах).

Важное замечание: *На большинство пунктов* ***задачи 10*** *легко получить ответ компьютерным перебором. Однако просим учитывать, что во многих случаях есть идеи решения (обоснований) без перебора, поэтому авторы считают, что пункты решенные только компьютерным перебором представляют небольшой интерес.*

Задача 11. Неэкономное вырезание из бумаги

Предисловие. Мы знаем, что дети очень часто вырезают нужные им фигуры из середины листа бумаги.

1. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 10×10. Из него в каком-то месте по линиям сетки вырезается квадрат 1×1, затем прямоугольники 1×2, 1×3, 1×4 и 1×5 (можно горизонтально, можно вертикально, то есть будем считать прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ равными).

1.1. Доказать, что из оставшейся части можно вырезать прямоугольник размером 1×6;

1.2. Привести пример, который показывает, что после вырезания прямоугольника 1×6, прямоугольник 1×7 вырезать нельзя.

2. Дан квадрат $n \times n$. Найти наибольшее натуральное k, для которого из этого квадрата по линиям сетки можно гарантированно вырезать квадрат 1×1, затем прямоугольники 1×2, …, $1 \times k$, но при этом прямоугольник $1 \times (k+1)$ гарантированно вырезать нельзя.

3. Исследуйте пункты 1 и 2 при условии, что из исходного квадрата вырезаются не прямоугольники, а квадраты 1×1, …, $k \times k$.

4. Попробуйте решить данную задачу, если изначально задан не квадрат, а прямоугольник размером $m \times n$.

Назовем элементарной фигурой порядка k (k-натуральное число):

а) правильный треугольник со стороной k;

б) для $k = 1$ правильный треугольник со стороной 1, для $k > 1$ равнобедренную трапецию с углом при большем основании $\frac{\pi}{3}$, боковым ребром 1 и основаниями, равными $(k–1)$ и k;

в) ромб со стороной k и острым углом $\frac{\pi}{3}$;

г) для $k = 1$ ромб со стороной 1 и острым углом $\frac{\pi}{3}$, для $k > 1$ параллелограмм со сторонами 1 и k и острым углом $\frac{\pi}{3}$.

5. Дан правильный треугольник со стороной n, разбитый на n^2 правильных треугольников со стороной 1. Для каждого из указанных выше пунктов а)-г) найдите наибольшее k, для которого из этого треугольника по линиям сетки можно гарантированно вырезать элементарные фигуры порядка $1, \ldots, k$, но при этом существует способ, показывающий, что после вырезания элементарной фигуры порядка k элементарную фигуру порядка $(k+1)$ гарантированно вырезать нельзя.

6. Решите предыдущую задачу при условии, что дан ромб со стороной n и острым углом $\frac{\pi}{3}$, разбитый на $2n^2$ правильных треугольников со стороной 1.

7. Предложите свои обобщения и изучите их.

Задача 12. Откладываем и измеряем отрезки

I. Измеряем линейкой:

Имеется линейка длиной 9 см без делений. Какое наименьшее число промежуточных делений нужно нанести на линейку, чтобы можно было отложить или измерить любой отрезок длиной 1 см, 2 см, 3 см, … или 9 см, прикладывая линейку лишь один раз (в каждом случае)? Ответ объясните.

1. Имеется линейка длиной 13 см без делений. Какое наименьшее число промежуточных делений нужно нанести на линейку, чтобы можно было отложить все отрезки длиной 1 см, 2 см, 3 см, …, 10 см, 11 см, 12, 13 см, прикладывая линейку лишь один раз (в каждом случае)?

II. Измеряем веревочкой:

2. **А)** Имеется веревочка длиной 9 см. На ней можно завязать маленькие узелки на определенных расстояниях от краев, для того, чтобы с помощью такой веревочки можно было измерять расстояния (например, если завязать узелок на расстоянии 1 см от левого края, то можно измерить отрезок, равный 8 см). Каждый завязанный узелок не меняет длины веревочки. Какое наименьшее число узелков требуется завязать, чтобы можно было измерить все расстояния длиной 1 см, 2 см, 3 см, …, 9 см, прикладывая веревочку лишь один раз (сгибать веревочку разрешается не более одного раза)?
3. **Б)** Рассмотрим задачу, аналогичную пункту А) с веревочкой длиной 13 см, причем отмерить нужно все расстояния, равные 1 см, 2 см, …, 13 см. Сможете вы справиться с этой задачей, если разрешается завязать не более трех узелков? Вновь прикладывать веревочку можно лишь один раз, и сгибать ее не более одного раза.

Примечание. В пунктах 3 и 4 можно отдельно рассматривать случаи, когда сгибать веревочку разрешается более одного раза.

III. Рассмотрите и изучите другие (более общие) случаи длин линейки и веревочки для задач, аналогичных I и II.

IV. Предложите свои направления или обобщения в этой задаче и изучите их.